

# Einfluß prismatischer Nebenwirkungen

Vortrag, gehalten anläßlich der WVAO-Tagung in Timmendorf

## in der Brillenoptik

Ein falsch zentriertes Brillenglas zwingt das Auge zu einer Vergenzbewegung, die immer entgegengesetzt der Basis des durch falsche Zentrierung erzeugten Prismas ist. Aus dieser Vergenzbewegung leitet nun Dr. Goersch, indem er das Problem mathematisch erfaßt, ein Korrekturglied zur Prentice-Formel ab. Dadurch erreicht man eine höhere Genauigkeit bei der Berechnung prismatischer Wirkungen. Diese „neue Prentice-Formel“ läßt sich für alle vorkommenden Fälle anwenden. Besonders gut läßt sich mit ihr die „wahre prismatische Differenz“ bei Anisometropenbrillen berechnen.

### 1. Einleitung

Ein Lichtstrahl wird beim Durchgang durch ein Prisma zur Prismenbasis hin abgelenkt. Der Winkel, den der austretende Strahl mit der ursprünglichen Richtung bildet, heißt Ablenkungswinkel  $\delta$ . Als Einheit für die ablenkende Wirkung wird die Prismendioptrie ( $\Delta$ ) benutzt, wobei  $\Delta$  einem Ablenkungswinkel  $\delta$  entspricht, bei dem der abgelenkte Strahl nach dem Durchlaufen einer Strecke von 1 m um 1 cm von der Richtung des ursprünglichen Strahles abweicht. Eine prismatische Wirkung von  $P\Delta$  bedeutet also, daß der abgelenkte Strahl nach 1 m um  $P\text{cm}$  gegenüber der ursprünglichen Richtung verschoben ist ( $P = 100 \cdot \tan \delta$ ). Diese Einheit läßt sich in der Praxis gut merken beim Vergleich mit der Angabe von Steigungen oder Gefällen bei Straßen in Prozent, da dort der gleiche Zusammenhang besteht.

Eine sphärische Linse ist aus unzählig vielen Prismen zusammengesetzt, wobei die Prismenwirkung um so stärker wird, je größer die Entfernung von der optischen Mitte der Linse ist. Bei einer positiven Linse liegt dabei die Prismenbasis zur Linsenmitte hin, was in Abb. 1 im Prinzip dargestellt ist. Eine Linse ohne Abbildungsfehler sammelt achsenparallel auftreffende Strahlen in einem Brennpunkt  $F'$  (oberer Teil der Abb. 1). Dieses ideale Verhalten zeigen Linsen mit sphärischen Begrenzungsflächen jedoch nicht. Bei diesen wächst die prismatische Wirkung mit der Entfernung von der optischen Mitte stärker als notwendig. Dadurch ergibt sich für jede kreisringförmige Zone um die optische Mitte ein anderer Brennpunkt, der um so dichter an der Linse liegt, je größer der Durchmesser der Zone ist. Dieser Abbildungsfehler heißt sphärische Aberration (unterer Teil der Abb. 1). Die entsprechenden Verhältnisse liegen bei der zerstreuernden Wirkung einer sphärischen Minuslinse vor, was in Abb. 2 dargestellt ist. Hier liegt die Prismenbasis zum Linsenrand hin.

### 2. Prismatische Wirkungen einer Linse

Wie groß die prismatische Wirkung in einem Punkt einer sphärischen Linse ist, hängt von der Stärke der Linse und von der Entfernung des betrachteten Punktes vom optischen Mittelpunkt ab. Trifft ein achsenparalleler Lichtstrahl in der Entfernung  $d$  von der optischen Achse auf eine positive Linse, so wird er um den Winkel  $\delta$  aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt und schneidet die optische Achse im Brennpunkt  $F'$ . Für den Ablenkungswinkel gilt nach Abb. 3:  $\tan \delta = \frac{d}{f} = d \cdot D$ , wobei  $d$  in m und  $D$  in dpt einzusetzen sind. Soll die Ablenkung nicht in Winkelgraden, sondern in Prismendioptrien ausgedrückt werden, so ist (wegen  $P = 100 \cdot \tan \delta$ )

$$P = d \cdot D, \quad (1)$$

wobei jetzt  $d$  in cm einzusetzen ist.

In der Brillenoptik wird in den meisten Fällen mit einer dünnen Linse gerechnet (unterer Teil der Abb. 3). Das bedeutet ein Gleichsetzen der bildseitigen Brennweite  $f'$  mit der augenseitigen fokalen Schnittweite  $s'$ , womit Brechwert  $D$  und Scheitelbrechwert  $S'$

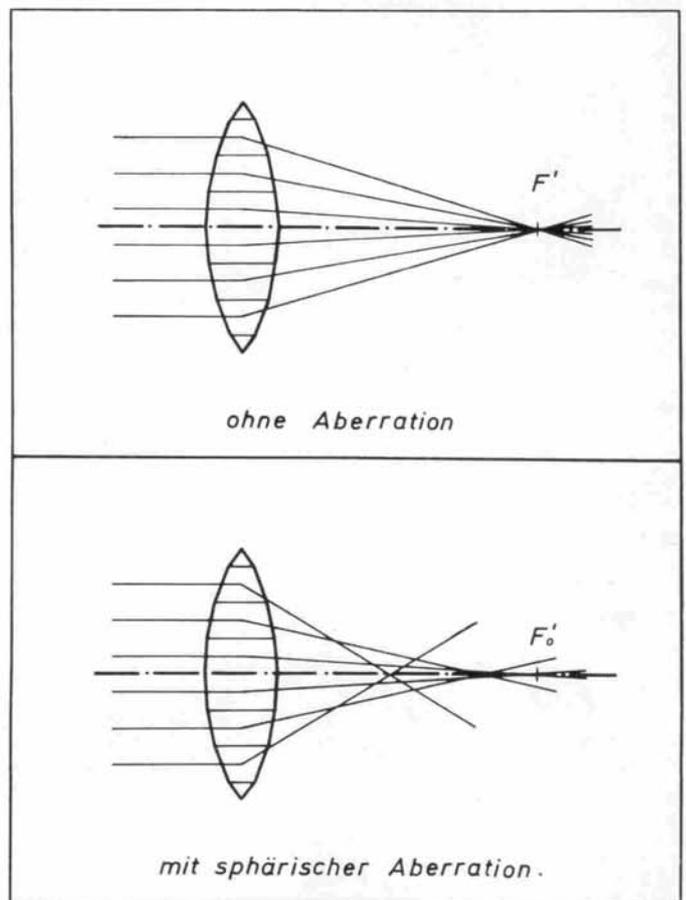


Abb. 1: Prismatische Wirkung sphärischer Plusgläser

identisch werden. Dadurch ergibt sich die sogenannte „Prentice-Formel“

$$P = d \cdot S' \quad (2)$$

Werden die Einfallshöhe  $d$  in cm und der Scheitelbrechwert  $S'$  in dpt eingesetzt, so ergibt sich die prismatische Wirkung  $P$  in  $\Delta$ . Für ein sphärisches Minusglas gelten dieselben Beziehungen

Wird diese Prentice-Formel zur Berechnung der prismatischen Nebenwirkungen eines Brillenglases benutzt, so ergeben sich Ungenauigkeiten durch die folgenden Punkte:

- Die Formel gilt exakt nur für eine Linse, die frei von Abbildungsfehlern ist; jedes sphärische Brillenglas zeigt jedoch sphärische Aberration, die stets zu einer größeren prismatischen Ablenkung führt.

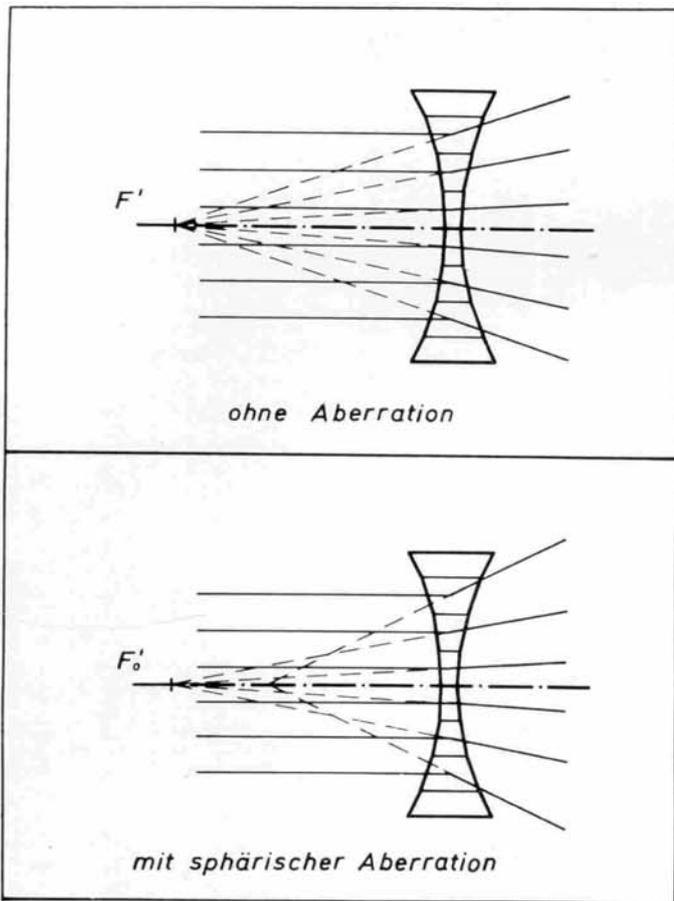


Abb. 2: Prismatische Wirkung sphärischer Minusgläser

c) Die Formel enthält den Scheitelbrechwert  $S'$  anstelle des Brechwertes  $D$ .

Nach Weinhold zeigt die Durchrechnung der tatsächlichen Verhältnisse für ein Brillenglas vom Scheitelbrechwert  $S' = +10$  dpt, daß die Punkte a und c praktisch ohne Bedeutung sind. Die Berücksichtigung von Punkt b ergibt gegenüber der Prentice-Formel Abweichungen von ungefähr 20 % bei einer Einfallshöhe von  $d = 10$  mm und ungefähr 30 % bei  $d = 20$  mm. Für schrägen Einfall von Strahlen ist die Anwendung der Formel in der Brillenoptik jedoch nur bei Anisometropie von Bedeutung. Dabei kommt es zur Beurteilung der Verträglichkeit von Brillengläsern nur auf die Differenz der prismatischen Wirkungen in den Durchblickpunkten beider Gläser an. Doch selbst bei Fehlern bis zu 30 % für die Einzelablenkungen sind die Fehler der Differenzen so klein, daß sie praktisch ebenfalls ohne Bedeutung sind.

Die Benutzung der Prentice-Formel liefert also für alle praktischen Fälle eine ausreichende Genauigkeit. Erhebliche Fehler können sich dagegen durch eine falsche Anwendung der Formel ergeben, worauf bereits Weinhold hingewiesen hat. Diese Fehler entstehen meist dadurch, daß für die Einfallshöhe  $d$  des Strahles nicht der richtige Wert eingesetzt wird. Die wirkliche Einfallshöhe und damit der tatsächliche Einfluß der prismatischen Nebenwirkungen von Brillengläsern auf das Sehen hängt stark von der richtigen Zentrierung der Gläser sowie vom Hornhaut-Scheitelabstand ab.

### 3. Prismatische Nebenwirkungen bei der Zentrierung von Brillengläsern

#### A. Monokulare Auswirkungen

Die Drehpunktforderung besagt, daß ein Brillenglas dann zum Auge richtig zentriert ist, wenn die optische Achse des Brillenglases durch den optischen Augendrehpunkt geht. Ist die Drehpunktforderung nicht erfüllt, so bildet die Fixierlinie des Auges mit der optischen Achse des Brillenglases einen Winkel, wenn das Auge ein Objekt in Richtung der optischen Achse des Brillenglases wahrnehmen will. Das Auge muß also eine Art „Schielstellung“ einnehmen, was in Abb. 4 für ein dezentriertes Plusglas dargestellt ist. Besitzt der optische Augendrehpunkt  $Z'$  den Abstand  $h$  von der optischen Achse  $OA_{Br}$  des Brillenglases, ist das Brillenglas also um den Betrag  $h$  dezentriert, so darf dieser Wert nicht in die Prentice-Formel eingesetzt werden, um die „Schielstellung“ des Auges zu bestimmen. Aus Abb. 4 ist zu sehen, daß die entsprechende Fixierlinie FL das positive Brillenglas in einem Abstand  $d$  von der optischen Mitte durchstößt, der größer ist als  $h$ . Je weiter das Brillenglas vom Auge entfernt ist, desto größer wird die Differenz zwischen  $d$  und  $h$ . Würde der Wert  $h$  anstelle der korrekten Einfallshöhe  $d$  des Strahles in die Prentice-Formel eingesetzt, so ergäbe sich eine zu geringe prismatische Nebenwirkung.

Soll die (bekannte) Dezentration  $h$  zur korrekten Ermittlung der prismatischen Nebenwirkung dienen, so kann aus Abb. 4 der Zusammenhang zwischen  $d$  und  $h$  entnommen werden. Nach dem Strahlensatz verhält sich  $d$  zu  $h$  wie  $f'$  zu  $s' - b'$ , wobei  $b'$  der Drehpunkt-Scheitelabstand ist (Abstand des optischen Augendrehpunktes  $Z'$  vom augenseitigen Brillenglassscheitel  $S_2$ ). Wird aus dieser Beziehung  $d$  ausgerechnet und in Formel (1) eingefügt, so ergibt sich

$$P = \frac{h \cdot S'}{1 - b' \cdot S'} \quad (3)$$

Werden  $h$  in cm,  $S'$  in dpt und  $b'$  in m eingesetzt, so ergibt sich  $P$  in  $\Delta$ . Hier ist die Benutzung des Scheitelbrechwertes korrekt und stellt keine Vernachlässigung dar.

Abb. 5 zeigt, daß bei einem dezentrierten Minusglas die wirkliche Einfallshöhe  $d$  des Strahles geringer ist als die Dezentration  $h$ . Würde hier der Wert  $h$  anstelle des korrekten Wertes  $d$  in die Prentice-Formel eingesetzt, so ergäbe sich eine zu große prismatische Nebenwirkung. Mathematisch liefert Abb. 5 die gleichen Zusammenhänge wie Abb. 4. Formel (3) gilt daher für jedes sphärische Brillenglas.

Welchen Einfluß die Größe des Drehpunkt-Scheitelabstandes  $b'$  auf die prismatische Nebenwirkung dezentrierter Brillengläser besitzt, ist in Abb. 6 dargestellt. Die unterschiedlichen Vorzeichen von  $P$  bei positiven und negativen Werten von  $S'$  weisen auf die entgegengesetzten Basislagen bei gleicher Dezentrierungsrichtung von Plus- und Minusgläsern hin. Die gestrichelte Gerade entspricht dem Wert  $b' = 0$  bzw. der einfachen Formel (2). Die beiden Kurven gelten für die Werte  $b' = 25$  mm und 30 mm in Formel (3).

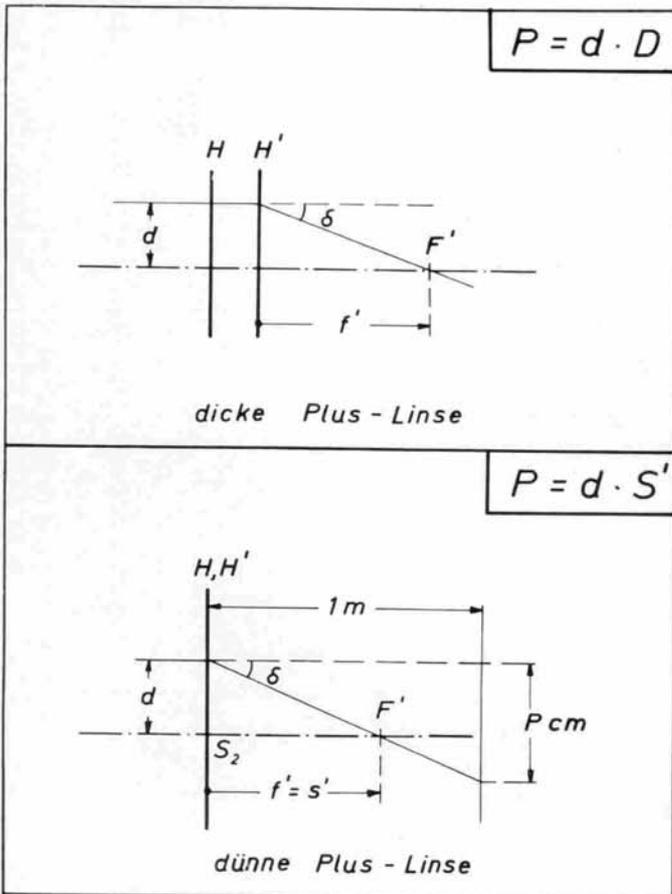


Abb. 3: Die Prentice-Formel

b) Voraussetzung für die Anwendung der Formel sind achsenparallele Strahlen; sie wird aber auch für schräg zur optischen Achse einfallende Strahlen benutzt.

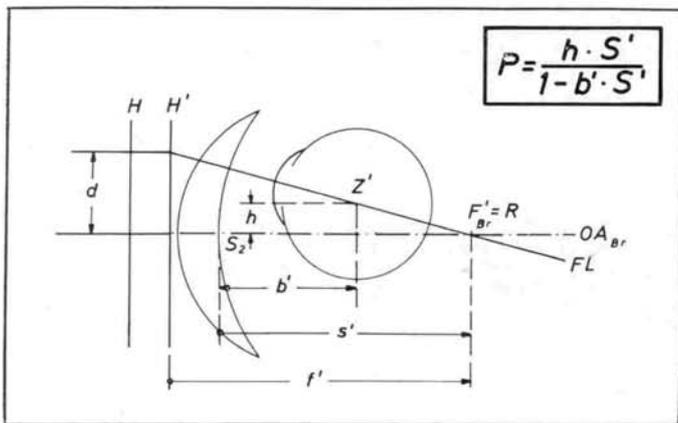


Abb. 4: „Schielstellung“ eines Auges hinter einem dezentrierten Plusglas

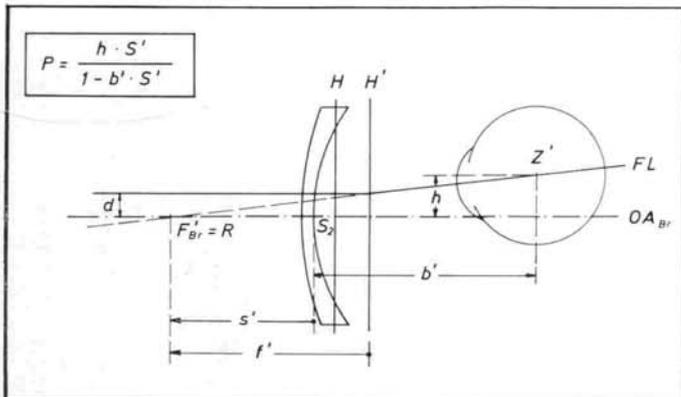


Abb. 5: „Schielstellung“ eines Auges hinter einem dezentrierten Minusglas

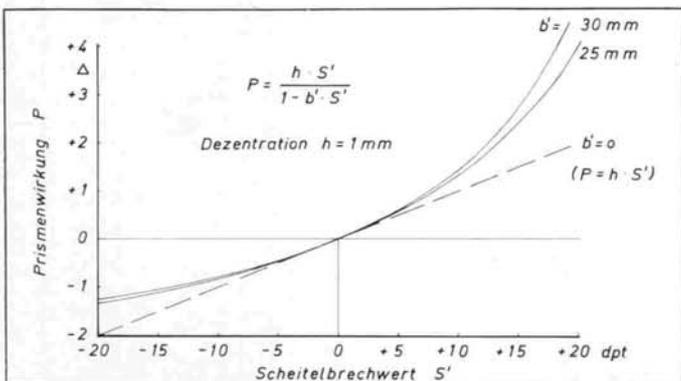


Abb. 6: Einfluß des Drehpunkt-Scheitelabstandes b' auf die prismatische Wirkung dezentrierter Brillengläser

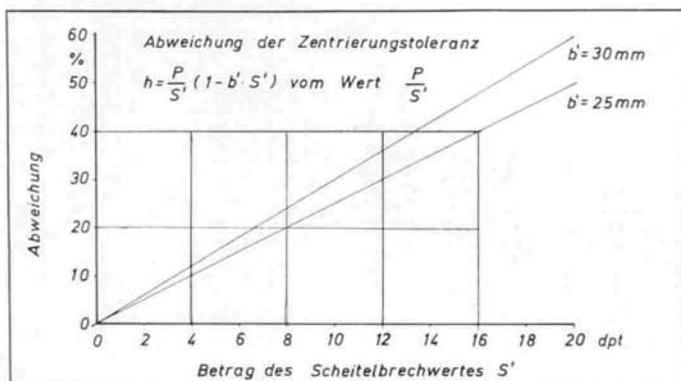


Abb. 7: Einfluß des Drehpunkt-Scheitelabstandes b' auf die Zentrierungstoleranz

Das entspricht einem Hornhaut-Scheitelabstand von  $e = 12$  mm und 17 mm, da der optische Augendrehpunkt etwa 13 mm von der Hornhautvorderfläche entfernt ist. Je größer der Hornhaut-Scheitel-

abstand ist, desto stärker unterscheiden sich also die prismatischen Wirkungen nach Formel (3) und (2). Dabei sind diese Unterschiede bei positiven Gläsern größer als bei entsprechenden negativen Gläsern.

## B. Binokulare Auswirkungen

Für die binokulare Zentrierung von Einstärkenfernbrillen wird in horizontaler Richtung die Einhaltung einer Toleranz von  $1^\Delta$  Basis außen empfohlen. Das heißt, die Differenz der prismatischen Nebenwirkungen in den Durchblickpunkten der beiden Gläser darf höchstens  $1^\Delta$  B.a. betragen (Orthophorie sei vorausgesetzt). Diese prismatische Differenz gibt den zulässigen Winkel zwischen den Fixierlinien beider Augen an, wenn ein fernes Objekt angeblickt wird. Würden die beiden gleich starken Gläser einer Brille um den gleichen Betrag  $h$  in der gleichen (Tabo-) Richtung dezentriert, so wäre zwar die binokulare Zentrierungstoleranz eingehalten, aber die (monokulare) Drehpunktforderung wäre nicht erfüllt. Es ist daher stets notwendig, auf beide Bedingungen zu achten.

Üblicherweise wird nun die prismatische Zentrierungstoleranz mit Hilfe der Prentice-Formel (2) für die verschiedenen Gläserstärken in dazugehörige Toleranzstrecken umgerechnet. Diese Strecken werden dann als (binokulare) Zentrierungstoleranzen (Abweichungen vom vorgeschriebenen Mittenabstand) in Abhängigkeit vom Scheitelbrechwert angegeben. Dieses Vorgehen ist jedoch nicht korrekt, da sich hierbei für Plus- und Minusgläser der entsprechenden Stärke die gleichen Toleranzstrecken ergeben. Formel (3) und Abb. 6 zeigen dagegen, daß ein dezentriertes Plusglas eine größere prismatische Nebenwirkung hervorruft als ein dezentriertes Minusglas entsprechender Stärke, wenn beide um die gleiche Strecke  $h$  dezentriert sind. Bei einem positiven Glas führt also schon eine geringere Dezentration als bei einem entsprechenden negativen Glas zur gleichen prismatischen Nebenwirkung (mit entgegengesetzter Basislage). Daher muß der richtige (vorgeschriebene) Mittenabstand bei positiven Brillengläsern mit größerer Genauigkeit eingehalten werden als bei entsprechenden negativen Gläsern, um innerhalb der zulässigen prismatischen Toleranz zu bleiben.

Die korrekten Toleranzstrecken sind aus Formel (3) zu berechnen. Die Abweichungen dieser richtigen Zentrierungstoleranzen von den nach Formel (2) ermittelten Werten zeigt Abb. 7 in Abhängigkeit vom Zahlenwert des Scheitelbrechwertes für die Drehpunkt-Scheitelabstände 25 mm und 30 mm (entsprechend  $e = 12$  mm und 17 mm). Um diese Abweichungen müssen die üblicherweise angegebenen Toleranzstrecken bei Plusgläsern verringert und bei Minusgläsern vergrößert werden. Je nach der Größe des Drehpunkt-Scheitelabstandes (oder Hornhaut-Scheitelabstandes) ergibt sich also eine Abweichung von beispielsweise 20 % vom üblichen Tabellenwert bereits bei einem Betrag des Scheitelbrechwertes zwischen 6,5 und 8 dpt.

Die vorangegangenen Betrachtungen gelten ebenso für die Zentrierung in vertikaler Richtung (Höhenzentrierung), für welche eine Toleranz von  $0,5^\Delta$  (Basis oben oder unten) zugrunde gelegt wird. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß positive Brillengläser gegenüber Dezentrationen in allen Richtungen „empfindlicher“ sind als negative Brillengläser.

## 4. Prismatische Nebenwirkungen bei Anisometropie

### A. Auswirkungen für die Ferne

Werden für beide Augen unterschiedlich starke Brillengläser benötigt, so ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten. Bei den folgenden Betrachtungen soll angenommen werden, daß die Drehpunktforderung für beide Brillengläser erfüllt ist. Wenn das nicht der Fall ist, dann gelten zusätzlich für jedes Glas die bisher behandelten Gesichtspunkte.

In Abb. 8 ist dargestellt, wie sich ein anisometropisches Augenpaar hinter korrekt zentrierten Brillengläsern verhält, wenn ein fernes Objekt seitlich der optischen Achse der Brillengläser betrachtet werden soll. Um die bei gleichem Hornhaut-Scheitelabstand (bzw.  $b'$ ) für beide Gläser erfüllte Drehpunktforderung anzudeuten, sind beide Augen mit ihren optischen Augendrehpunkten  $Z'$  übereinander gezeichnet. Damit binokulares Einfachsehen gewährleistet ist, nehmen die Augen eine Schielstellung ein (Winkel zwischen den Fixierlinien  $FL_1$  und  $FL_2$ ). Diese Schielstellung ist dadurch bedingt, daß das Auge hinter dem mathematisch stärkeren (d. h. stärker positiven oder schwächer negativen) Glas weiter von der Richtung der optischen Achse des Brillenglases abweichen muß als das andere Auge. Blicken die Augen nicht in Richtung der

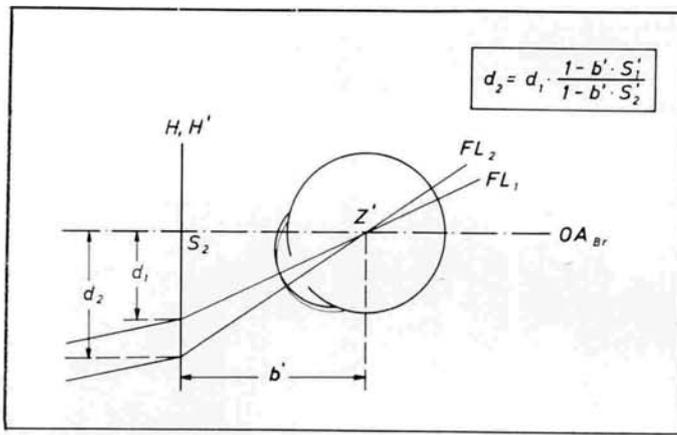


Abb. 8: Schielstellung eines Augenpaares hinter unterschiedlich starken Brillengläsern

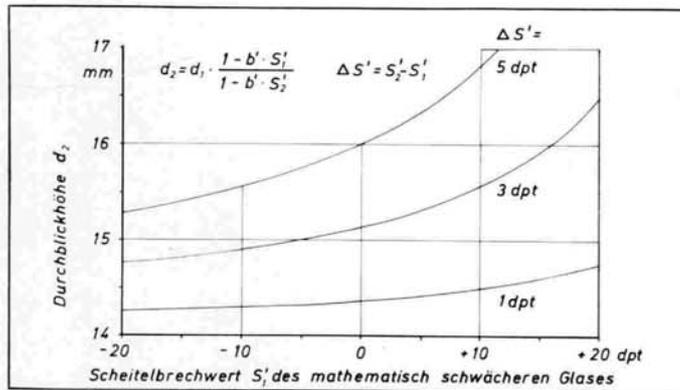


Abb. 9: Einfluß der anisometrischen Differenz  $\Delta S'$  auf den Unterschied der Durchblickhöhen bei  $d_1 = 14$  mm und  $b' = 25$  mm

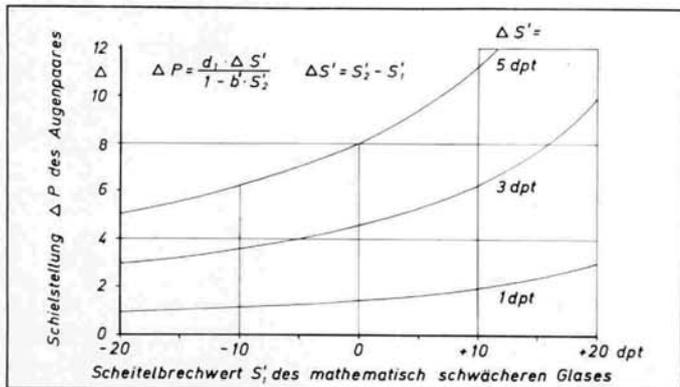


Abb. 10: Einfluß der anisometrischen Differenz  $\Delta S'$  auf die Schielstellung eines Augenpaares bei  $d_1 = 14$  mm und  $b' = 25$  mm

optischen Achsen der Brillengläser, dann müssen sie also stets eine Schielstellung einnehmen, und die Einfallshöhen  $d_1$  und  $d_2$  sind für beide Gläser unterschiedlich. Diese beiden Einfallshöhen besitzen den Zusammenhang

$$d_2 = d_1 \cdot \frac{1 - b' \cdot S_1}{1 - b' \cdot S_2} \quad (4)$$

Hierbei wurde wieder der Brechwert  $D$  durch den Scheitelbrechwert  $S'$  ersetzt. Der Unterschied zwischen  $d_1$  und  $d_2$  hängt danach außer vom Hornhaut-Scheitelabstand (bzw.  $b'$ ) von den Stärken beider Gläser ab (nicht nur von deren Differenz!).

Wie stark sich die einzelnen Größen auswirken, ist in Abb. 9 an einem Beispiel gezeigt. Bei einem Drehpunkt-Scheitelabstand von  $b' = 25$  mm (entsprechend  $e = 12$  mm) ist eine Einfallshöhe von  $d_1 = 14$  mm beim mathematisch schwächeren Glas angenommen worden. Das Diagramm zeigt die Einfallshöhe  $d_2$ , die sich beim anderen Glas in Abhängigkeit vom Scheitelbrechwert  $S_1$  des mathematisch schwächeren Glases ergibt. Als Parameter dient

dabei die Differenz der Scheitelbrechwerte beider Gläser, die sogenannte „anisometrische Differenz“  $\Delta S'$ .)

Soll nun der beschwerdefrei ausnutzbare Gläserbereich um die optische Mitte herum bestimmt werden, so muß die prismatische Differenz  $\Delta P$  in den beiden Durchblickpunkten gemäß

$$\Delta P = d_2 \cdot S_2' - d_1 \cdot S_1' \quad (5)$$

ermittelt werden. (An dieser Stelle wird oft der Fehler begangen, daß für beide Gläser nach Formel (7) die gleiche Einfallshöhe  $d$  eingesetzt wird.)  $\Delta P$  stellt die wirkliche Schielstellung des Augenpaares dar. Wird in Formel (5) der Wert für  $d_2$  aus Formel (4) eingesetzt, so ergibt sich als Differenz der prismatischen Nebenwirkungen in den entsprechenden Durchblickpunkten

$$\Delta P = \frac{d_1 \cdot \Delta S'}{1 - b' \cdot S_2'} \quad (6)$$

Diese Schielstellung ist in Abb. 10 für die Werte aus Abb. 9 dargestellt. Es ist zu sehen, daß die für das binokulare Einfachsehen notwendige Schielstellung um so größer ist, je höher die anisometrische Differenz ist und je stärker die Gläser im mathematischen Sinne sind. Damit erklärt sich die verschiedentlich gemachte Beobachtung, daß Träger von Minusgläsern die Vollkorrektur einer bestimmten Anisometropie besser vertragen als Träger positiver Brillengläser. Der beschwerdefrei ausnutzbare Scheibenbereich ist nämlich für den Minusbrillenträger größer als für den Plusbrillenträger. (Hinzu kommt das sowieso größere Blickfeld des korrigierten Myopen.) Die Zusammenhänge der Formeln (4), (5) und (6) gelten für jede beliebige Blickrichtung. Aus Formel (6) ist der Einfluß des Hornhaut-Scheitelabstandes (bzw.  $b'$ ) auf die Schielstellung der Augen zu ersehen. Ist der mathematisch stärkere Scheitelbrechwert  $S_2'$  positiv, so ist ein kleiner Wert für  $b'$  günstig, bei negativem  $S_2'$  ein großer Wert, damit  $\Delta P$  klein wird.

Unabhängig von der Art der Fehlsichtigkeit ergibt sich bei Anisometropie jedoch in horizontaler Richtung ein unsymmetrisches Gebrauchsblickfeld bezogen auf die optische Mitte der Gläser. Die Ursache liegt darin, daß die zum binokularen Einfachsehen notwendige Schielstellung der Augen bei Objekten temporal von der optischen Achse des mathematisch stärkeren Glases einen Divergenzzwang darstellt und für Objekte auf der anderen Seite einen Konvergenzzwang. Das Konvergieren fällt dem Augenpaar leichter als das Divergieren, und so wird das Gebrauchsblickfeld zur temporalen Seite des mathematisch stärkeren Glases geringer sein als in der entgegengesetzten Richtung. In vertikaler Richtung ergibt sich bezüglich der optischen Mitte der Gläser ein symmetrisches Gebrauchsblickfeld, da beim Blick um die gleiche Strecke nach oben oder unten dieselbe Richtungsdifferenz der Fixierlinien beider Augen vorliegt (Abb. 8).

## B. Auswirkungen für die Nähe

Wichtig ist bei Anisometropie der prismatische Höhenausgleich im Nahdurchblickpunkt von Mehrstärkengläsern. In diesem Fall soll eine Stelle des Glases benutzt werden, die für beide Gläser den gleichen Abstand vom optischen Mittelpunkt des Fernteles besitz. Die Größe des notwendigen Ausgleichsprismas muß nach

$$\Delta P = d \cdot \Delta S' \quad (7)$$

ermittelt werden, da es sich hier (nach erfolgtem prismatischen Ausgleich) für beide Gläser um die gleiche Einfallshöhe  $d$  handelt. Wird der Ausgleich jedoch unterlassen, so ist die resultierende Schielstellung des Augenpaares wieder nach Formel (6) zu ermitteln. Durch die objektseitig vom Brillenglas auftretende Parallaxe der Hauptstrahlen (nahes Objekt) tritt allerdings bei der Anwendung von Formel (6) eine Ungenauigkeit auf (bis etwa 10 %).

Für Einstärkennahbrillen gelten alle bei Fernbrillen aufgeführten Gesichtspunkte, wobei die zahlenmäßige Genauigkeit durch die erwähnte Parallaxe mit der Objektentfernung geringer wird.

\* Zum leichteren Verständnis der Abb. 9 sollen zwei Zahlenbeispiele dienen. Beispiel 1:  $S_1' = -5$  dpt und  $S_2' = -2$  dpt ergibt  $\Delta S' = 3$  dpt und damit  $d_2 = 15$  mm; Beispiel 2:  $S_1' = 0$  dpt und  $S_2' = +5$  dpt ergibt  $\Delta S' = 5$  dpt und damit  $d_2 = 16$  mm.

## Literatur:

- DIN 58208: Begriffe und Zeichen bei Brillengläsern in Verbindung mit dem menschlichen Auge (Entwurf Juni 1970)
- Theo Glaser: Die Phorien (VEB Verlag Technik, Berlin 1969)
- Hermann Weinhold: Die prismatische Wirkung von Brillengläsern (Augenoptik 1, 1965, 23–27)
- Th. Graff: Schielwinkelmessung an bebrillten Augen (Klin. Mbl. Augenk. 153, 1968, 711–714)
- M. Jalie: The Principles of Ophthalmic Lenses, Vol. I (Association of Dispensing Opticians, London 1967)